Pierre-Simon Laplace
1749-1827

La Trasformata di Laplace

Leonhard Euler
(Eulero)
1707-1783

La Trasformata di *Eulero*

Definizione

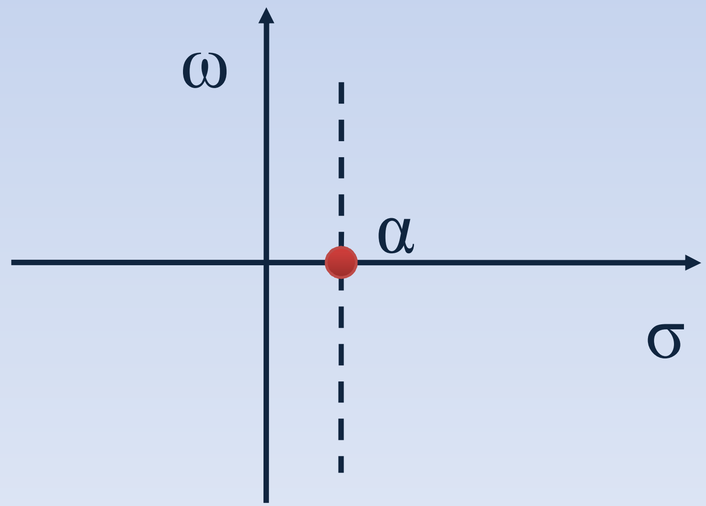
Si definisce trasformata di Laplace della funzione *f(t)* la funzione *F(s)* così definita:

$$F(s) = L\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Dove $s=\sigma+j\omega=\sigma+j2\pi f$.

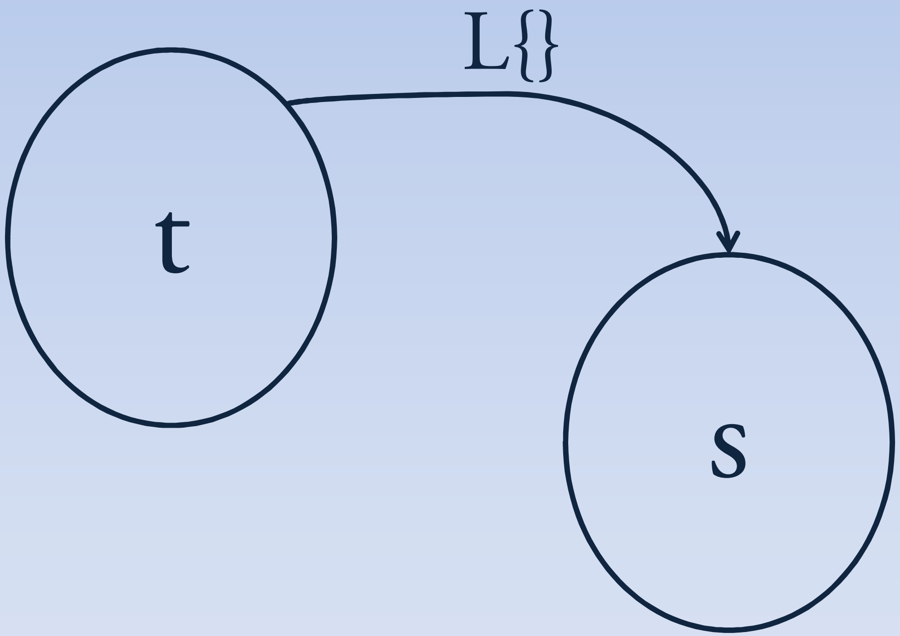
Definizione

Se esiste F(s) in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ allora esiste per tutte le s tali che $Re\{s\} > Re\{s_0\} = \sigma_0$. Si definisce α detta *ascissa di convergenza* il più piccolo valore di σ_0.



Definizione

Passare dal dominio del tempo al dominio della frequenza.



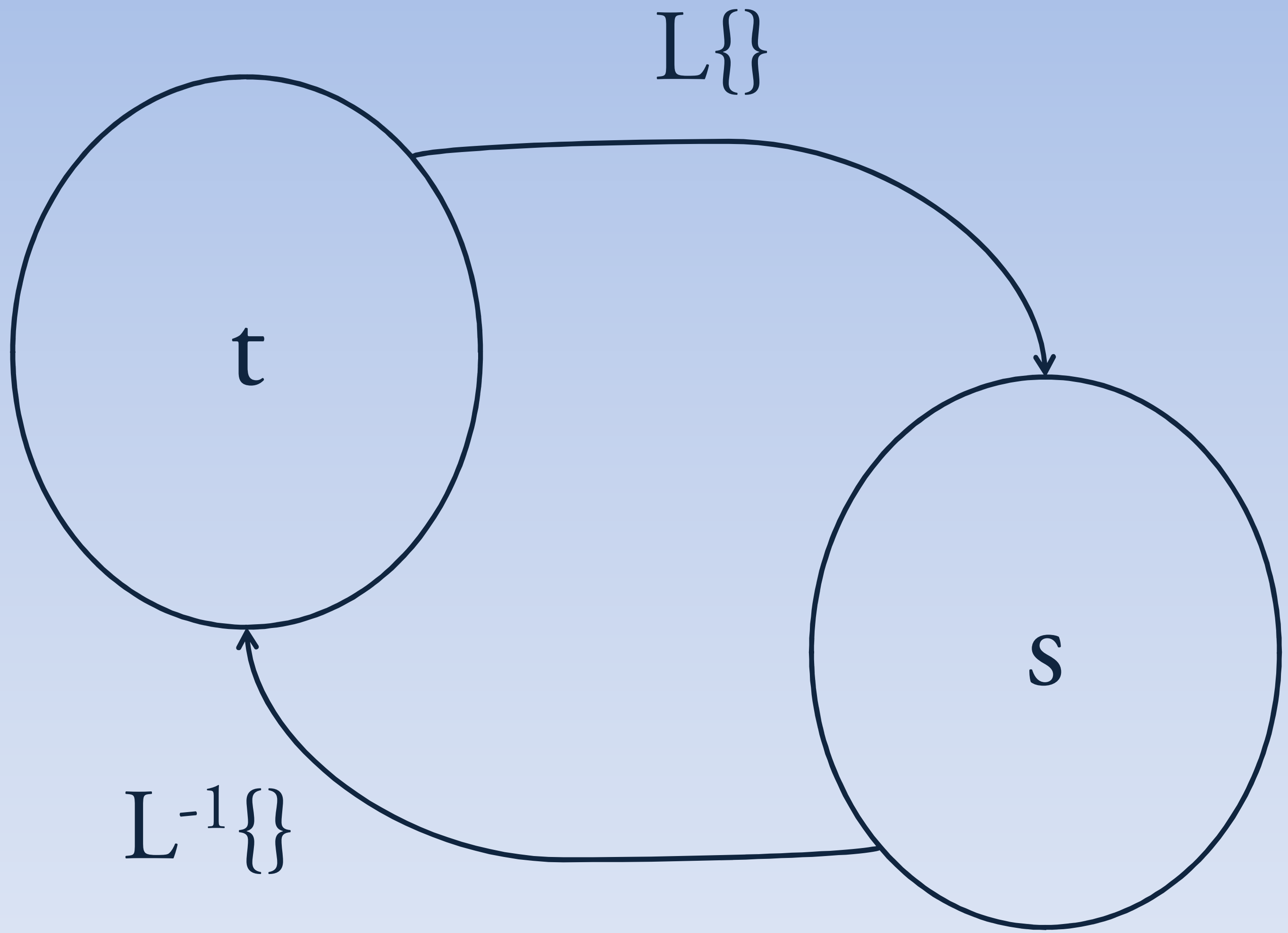
Antitrasformata

Se *F(s)* è la trasformata di Laplace di una funzione f(t) si definisce:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds$$

Dove c è un qualsiasi numero reale tale che sia c>α.

Tempo-Frequenza



Proprietà della Trasformata di Laplace

- UNICITÀ

$$L\{f(t)\}=L\{g(t)\} \leftrightarrow f(t)=g(t) \text{ q.o.}$$

- LINEARITÀ

$$L\{\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)\}=\lambda_1 L\{f_1(t)\}+ \lambda_2 L\{f_2(t)\}$$

- DERIVAZIONE

$$L\{f'(t)\}= s\, L\{f(t)\}-f(0)$$

$$L\{f''(t)\}= s^2 L\{f\} - s\, f(0) - f'(0)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}= s^n L\{f\} - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

$$L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

- INTEGRALE

$$L\{\int f(\tau)d\tau\} = L\{f(t)\} / s$$

- TRASLAZIONE COMPLESSA

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\}= e^{at}f(t)$$

- TRASLAZIONE NEL TEMPO

$$L\{f(t-a)u(t-a)\}= e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}= f(t-a)u(t-a)$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

- INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

$$f(t) \bullet g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$L\{f \bullet g\} = F \cdot G$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

- TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- TEOREMA DEL VALORE FINALE

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Trasformate notevoli

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$L\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\partial(t) = 1$$

$$L\{sen(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$u(t) = \frac{1}{s}$$

$$L\{e^{-at}\cos(bt)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{s^n}$$

$$L\{e^{-at}sen(bt)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Antitrasformate notevoli

$$\frac{1}{(s+a)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$$

$$\frac{1}{s(s+a)} = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$$\frac{s+c}{(s+a)^2+b^2} = e^{-at}\left(\cos(bt) + \left(\frac{c-a}{b}\right)sen(bt)\right)$$

$$\frac{s \cdot sen\Phi + \omega \cdot \cos\Phi}{s^2+\omega^2} = sen(\omega t + \Phi)$$

Trasformazioni

Sfruttando le trasformate notevoli e le proprietà della trasformata di Laplace si possono ricavare tutte le altre trasformate.

Esempio

Calcolare la trasformata di Laplace di:

$$f(t)=te^{-t}$$

$$L\{tf(t)\}=-F'(s)$$

$$L\{e^{-t}\}=1/(s+a)$$

$$F'(s)=-1/(s+a)^2$$

$$L\{te^{-t}\}=1/(s+a)^2$$

Applicazioni

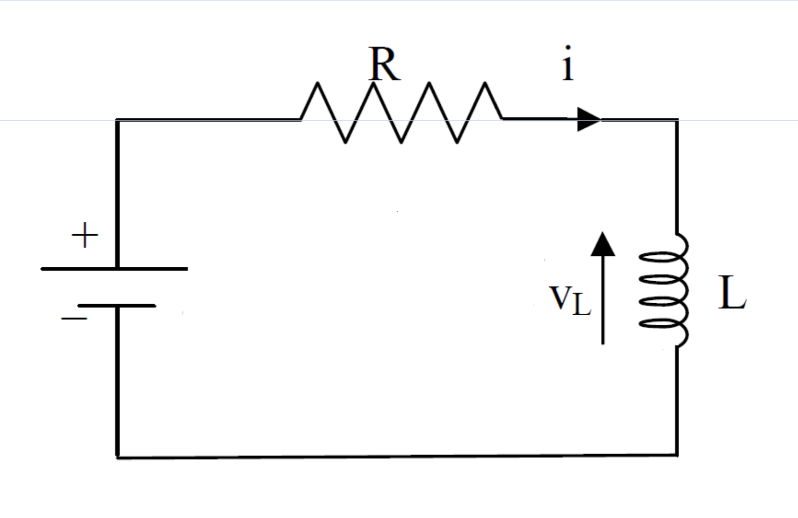
Impedenza nei circuiti elettrici

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$ V(s)=sL I(s) Z=sL

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$ I(s)=sC V(s) Z=1/sC

Applicazioni

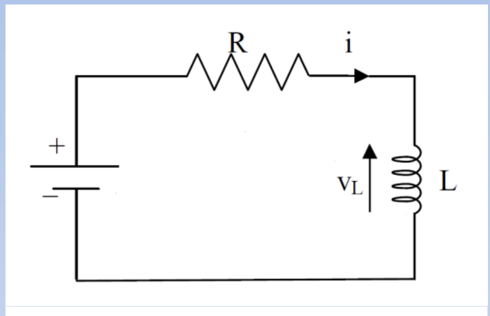
Soluzioni di Eq. differenziali.



$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \\ i(0^+) = i_0 \end{cases}$$

Applicazioni

Soluzioni di Eq. differenziali.



$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = Vu(t) \\ i(0^+) = i_0 \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}$$

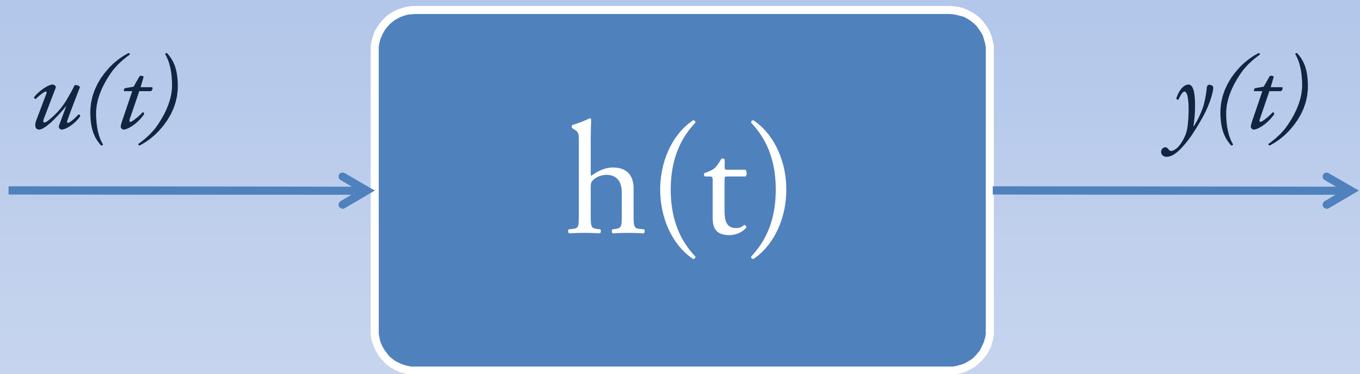
$$L\left(sI(s) - I_0\right) + RI(s) = V\frac{1}{s}$$

$$I(s) = \frac{V}{s(R+sL)} + \frac{LI_0}{R+sL}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} + \left(I_0 - \frac{V}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Sistemi LTI

Nel dominio del tempo



$$y(t) = u(t) \bullet h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

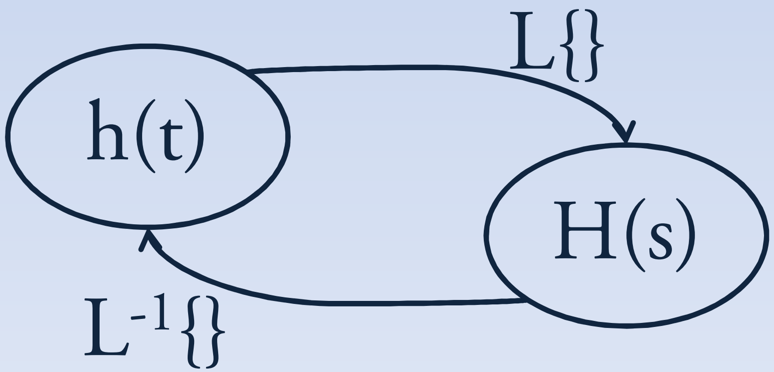
Sistemi LTI

Nel dominio della frequenza

$$Y(s) = U(s) \cdot H(s)$$

Funzione di trasferimento

La risposta impulsiva definisce completamente un sistema LTI ed è una sua rappresentazione nel dominio del tempo.
La funzione di trasferimento è una rappresentazione matematica della relazione tra l'ingresso di un sistema LTI e la risposta del sistema stesso nel dominio della frequenza.



Funzione di trasferimento

Tra le varie possibili relazioni ingresso-uscita che possono essere introdotte per lo studio dei sistemi lineari, la più importante è, senza dubbio, quella che fa capo alla nozione di funzione di trasferimento (fdt).

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento è un rapporto tra polinomi in s, in cui il grado del denominatore è maggiore o uguale al grado del numeratore. Nel caso in cui il numeratore e il denominatore abbiano lo stesso grado il sistema si dirà *improprio.*
- I valori di s per cui si annulla il denominatore della fdt si dicono *poli;*
- I valori di s per cui si annulla il numeratore vengono definiti *zeri della* fdt;
- Il numero di poli costituisce l'ordine del sistema.

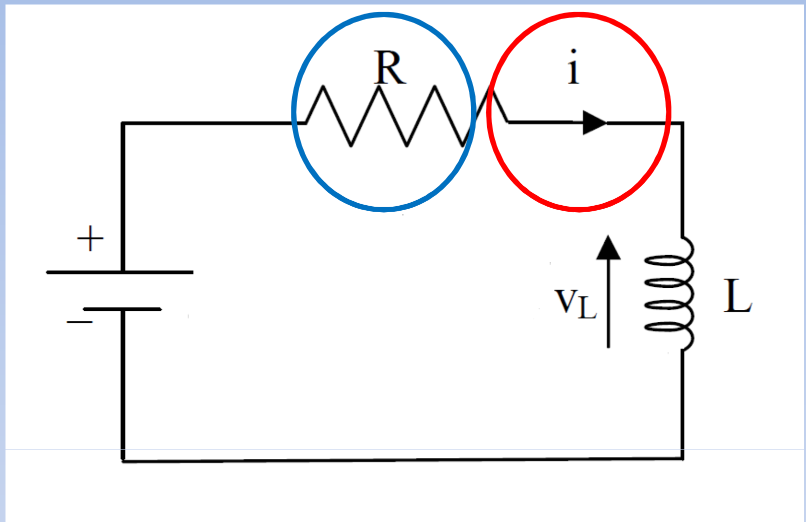
Forma di Stato

Un sistema LTI può essere rappresentato sotto *forma di stato:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dove x(t) è il vettore delle variabili di stato e A,B,C,D delle matrici di ordine opportuno.

Esempio



$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \\ i(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) + \dfrac{1}{L}u(t) \\ V_R(t) = Ri(t) \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L} i(t) + \dfrac{1}{L} u(t) \\ V_R(t) = Ri(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{R}{L} \\ B = \dfrac{1}{L} \\ C = R \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{R}{L} x(t) + \dfrac{1}{L} u(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases}$$

Formula di Lagrange

Dato un sistema LTI rappresentato in forma di stato. Per t>t_0 e x(t_0)=x_{t^0} varrà:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

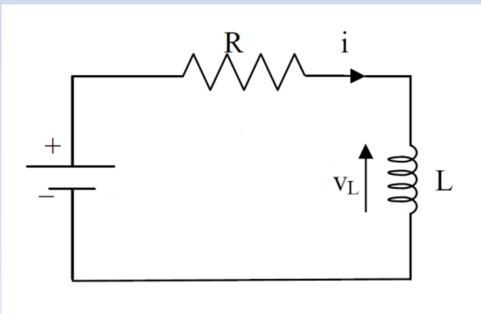
$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_{t_0} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} \dots$$

Formula di Lagrange

Il primo termine rappresenta l'evoluzione libera e dipende solamente dalle condizioni iniziali.
Il decondo rappresenta l'evoluzione forzata e dipende solamente dagli ingressi o forzanti.

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$



$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \left(1 - \frac{V}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Forma di Stato 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Forma di Stato 3

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + (sI - A)^{-1} x(0)$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1} x(0)$$

La matrice $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ viene detta matrice delle funzioni di trasferimento.
Nel caso di un sistema SISO H(s) coinciderà con la fdt.